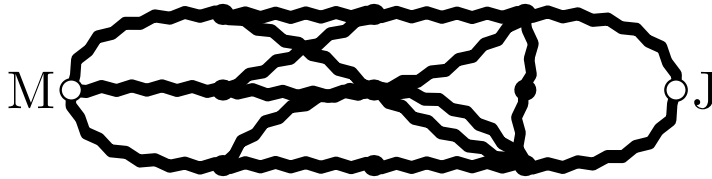


Kombinatorika a grafy I: série 6 – k -souvistlost

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Úloha 1. Na ostrově Papua-Nová Guinea řeší obyvatelé tamní vesnice ležící uprostřed jezera J následující problém: z moře M k nim po místním systému řek (viz obrázek) den co den připlouvají krokodýli a útočí na vesničany. Šaman se proto rozhodl na řece postavit stavidla tak, aby mohli regulovat všechny přítoky do jezera (stavidla lze stavět jen v místech, kde se řeka nevětví). Bohužel si nejsou jisti, zda umí najít optimální řešení, proto se obrací na Vás – jejich zajatce – s nabídkou, že Vás nesní, pokud rozmístění stavidel navrhnete Vy. ($-c^2 + 4c - 3$ bodů; c značí počet použitých stavidel)



Úloha 2. Dokažte, že každý 2-souvistlý graf má silně souvislou orientaci. (2 body)

Úloha 3. Rozhodněte, zda souvislý kubický (3-regulární) graf je hranově k -souvistlý právě když je vrcholově k -souvistlý. (d bodů; d je počet $k \in \{1, 2, 3\}$, pro než rozhodnete)

Úloha 4. Najděte podmínku v zadání předcházející úlohy, kterou když odstraníte, získali byste za její vyřešení ihned zápočet. (0 bodů)

Úloha 5. Ukažte, že pro každý 3-souvistlý graf G platí následující: po kontrakci hrany $\{u, v\}$ zůstane 3-souvistlý právě tehdy, když po odebrání vrcholů u a v z G bude 2-souvistlý. Kontrakce hrany znamená, že slepíme oba koncové vrcholy do jednoho, přičemž hrany, které vedly do těchto vrcholů přepojíme do „slepence“, a odstraníme případné násobnosti hran. (3 body)