

# Kombinatorika a grafy I: série 7 – KPR, SRR a jiné TLA

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

**Úloha 1.** Mějme bipartitní graf na  $2n$  vrcholech takový, že každá partita má velikost  $n$ .

- Dokažte, že pokud minimální stupeň  $G$  je alespoň  $n/2$ , pak  $G$  obsahuje perfektní párování. (2 body)
- Stačilo by, kdyby min. stupeň  $G$  byl alespoň  $n/2 - 1$ ? (1 bod)

**Úloha 2.** Dokažte, že pro  $m$  mocninu dvou lze  $K_m$  rozložit na  $m - 1$  hranově disjunktních perfektních párování. (2 body)

**Úloha 3.** Mějme lib. logickou formuli, která může obsahovat symboly pro proměnné, konjunce, disjunkte a negace, v tzv. konjunktivně normálním tvaru (CNF). Formule tohoto tvaru se skládá z konjunkcí klauzulí, kde klauzule je disjunktce proměnných resp. jejich negací. Např.  $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee a)$  je formule v CNF, naproti tomu formule  $(a \vee b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b)$  není. Poznamenejme jen na okraj, že každá logická formule lze převést do CNF. Dokažte, že pokud každá klauzule obsahuje právě tři proměnné resp. jejich negace (jinými slovy, velikost klauzule je tři) a každá proměnná ať už jako negace či jako gace se vyskytuje v právě třech klauzulích, potom vždy existuje přiřazení pravdivostních hodnot proměnným tak, že daná formule bude splněna. Pro ty z Vás, kteří znají SAT, by šlo zadání formulovat jednodušeji: dokažte, že 3,3-SAT formule je vždy splnitelná. (3 body)

**Úloha 4.** Dokažte, že přímký libovolné konečné projektivní roviny (KPR) mají systém různých reprezentantů (SRR). (2 body)

**Úloha 5.** Popište všechny systémy, které splňují axiomy (A1) a (A2) konečných projektivních rovin, ale nespĺňují (A0). (2 body)

**Úloha 6.** Nalezňete maximální množinu navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu 4 a dokažte, že je maximální. (1 bod)

**Úloha 7.** Pro  $m \leq n$  definujeme latinský obdélník velikosti  $m \times n$  jako obdélníkovou tabulku  $m \times n$  vyplněna čísly  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , v jejímž každém řádku a každém sloupci se žádná dvě čísla neopakují. Kolik existuje latinských obdélníků řádu  $2 \times n$ ? (2 body)