

Kombinatorika a grafy III – 1. série domácích úkolů

Pro získání zápočtu je potřeba z **každé** série domácích úkolů vyřešit správně alespoň 1/3 úloh. Studenti kombinovaného studia, kteří se neúčastní cvičení, potřebují z každé série vyřešit alespoň 2/3 úloh. Řešení vysázené pomocí programu určeného pro sazbu matematiky (např. \TeX) zasílejte do **úterý 6.12. 15:39** na email *volec@kam.mff.cuni.cz*, případně ho můžete odevzdávat osobně na cvičení (pak samozřejmě můžete odevzdat řešení napsané rukou; důrazně však žádám o nezasilání fotek/scanu rukou psaného řešení emailem). Budete-li mít jakýkoli dotaz k zadání, ozvěte se mi na výše uvedený email.

Úloha 1. Bud' $G = (V, E)$ graf a $W \subseteq V$ množina vrcholů velikosti větší než $k + 1$.

- a) Ukažte, že má-li G stromovou šířku k , potom v G existuje vrcholový řez C velikosti nejvýše $k + 1$ takový, že každá komponenta $G \setminus C$ obsahuje nejvýše $|W|/2$ vrcholů z W .
- b) Pomocí části (a) zkonstruujte polynomiální algoritmus, který pro graf G buď nalezne stromový rozklad šířky $3k + 2$, nebo odpoví, že G má stromovou šířku větší než k .

Úloha 2. Nalezněte algoritmus, který pro n -vrcholový graf G se stromovou šířkou (nejvýše) k spočte v čase $O(n)$ počet všech perfektních párování v G . Můžete předpokládat, že stromový rozklad G šířky k je součástí zadání.

Úloha 3. Bud' G graf na n vrcholech a necht' α je velikost největší nezávislé množiny v G . Dokažte, že G obsahuje $K_{\lceil n/(2\alpha-1) \rceil}$ jako minor.