Kombinatorika a grafy I: série 1 – opakování diskrétní matematiky

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. Dokažte, že pro libovolných $n+1$ přirozených čísel v intervalu $[1, 2n]$ platí:

a) Existují dvě nesoudělná čísla. *(2 body)*

b) Existují dvě čísla, že jedno je násobek druhého. *(2 body)*

Úloha 2. Dokažte následující vztah o součtu kombinačních čísel:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k\binom{n}{k}.$$

(3 body)

Úloha 3. Nechť $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny grafu G. Nezávislá množina je podmnožiny vrcholů, kde žádné dva nejsou spojeny hranou. Dokažte, že

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1},$$

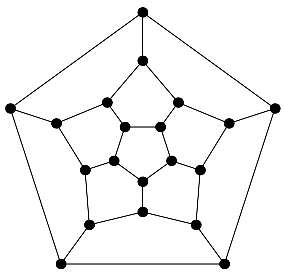
kde $\Delta(G)$ značí maximální stupeň vrcholu v grafu G. *(3 body)*

Úloha 4. Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$. *(3 body)*

Úloha 5. Tah je posloupnost střídavě vrcholů a hran $v_1e_1v_2e_2\ldots e_{n-1}v_n$, kde se žádná hrana neopakuje, tedy pro $i \neq j$ platí $e_i \neq e_j$. Naopak vrcholy se opakovat mohou. Rozhodněte, zda lze každý souvislý graf G, který má $2k$ vrcholů lichého stupně a ostatní sudého, nakreslit pomocí k disjunktních ne nutně uzavřených tahů. *(4 body)*

Úloha 6. Hamiltonovská kružnice je kružnice procházející všemi vrcholy grafu – tedy posloupnost $v_1e_1v_2e_2\ldots e_nv_1$, že pro $i \neq j$ je $v_i \neq v_j$ a $e_i \neq e_j$.

a) Nalezněte Hamiltonovskou kružnici pro pravidelný dvanáctistěn. *(1 bod)*



b) Uvažme šachovnici $n \times n$ pro liché n. Dokažte, že ať začnete kdekoliv, není možné proskákat koněm celou šachovnici a vrátit se zpět na začátek, přičemž navštívit každé políčko právě jednou. Jinými slovy: Uvažme graf, jehož vrcholy jsou jednotlivá políčka šachovnice a dva vrcholy jsou spojené hranou, právě když je mezi nimi možné táhnout koněm. Dokažte, že pro lichý rozměr takový graf nemá Hamiltonovskou kružnici. *(2 body)*

$\star$ c) Rozhodněte, pro která n má šachovnice $n \times n$ Hamiltonovskou kružnici pro koně. Můžete zkusit vyřešit i malé případy, budou za ně nějaké body. *(5 body)*

Úloha 7$\star$. Graf je k-partitní, pokud jeho vrcholy lze rozdělit do k disjunktních množin (partit), že všechny hrany vedou pouze mezi různými partitami. Úplný k-partitní graf obsahuje všechny takové hrany.

a) Dokažte, že pokud úplný k-partitní graf na n vrcholech má maximální počet hran, potom se velikosti partit liší nejvýše o 1. *(1 bod)*

b) Nahlédněte, že po přidání libovolné hrany do úplného k-partitního grafu vznikne klika K_{k+1}. *(1 bod)*

c) Ukažte, že úplný k-partitní graf na n vrcholech má nejvýše $\frac{k-1}{2k} \cdot n^2$. *(2 body)*

d) Nahlédněte, že graf neobsahující K_{k+1}, jehož počet hran je maximální, již nutně obsahuje K_k. *(1 bod)*

e) Indukcí dokažte, že každý graf neobsahující K_{k+1} jako podgraf má nejvýše $\frac{k-1}{2k} \cdot n^2$. *(3 body)*