Kombinatorika a grafy I: série 2 – princip inkluze a exkluze

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Důležitý jsou postup, nikoliv konkrétní číselné výsledky. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. Kolika různými způsoby lze ke kulatému stolu posadit r Rusů, g Germánů a b Bulharů tak, aby příslušníci žádného národa netvořili souvislý úsek? (Předpokládejte, že všichni jsou navzájem rozlišitelní, naopak rozesazení lišící se pouze pootočením stolu považujeme za stejná.) *(4 body)*

Úloha 2. Kolik čísel zbyde, vyškrtáme-li z množiny $1, 2, 3, \ldots, 1000$ všechny násobky 2, 3, 5 a 7? *(3 body)*

Úloha 3. Karetní balíček obsahuje 52 karet čtyř různých barev, 13 karet od každé barvy.

a) Kolika způsoby lze vybrat 13 karet tak, aby mezi nimi byly karty všech barev, jestliže na pořadí vybraných karet nezáleží? *(2 body)*

b) Kolik je výběrů, jestliže požadavky jsou stejné jako v a), jen na pořadí karet záleží? *(2 body)*

Úloha 4. Na n-místném kolotoči jelo n dětí. Děti chtějí jet ještě jednou, ale žádné z nich nechce sedět za stejným dítětem jako při první jízdě. Kolika různými způsoby je můžete posadit na kolotoč tak, abyste vyhověli jejich přání? (Výsledek nemusíte upravovat.) *(3 body)*

Úloha 5. Mějme dvě přirozená čísla k a l.

a) Volme k a l náhodně rovnoměrně z $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Vypočtěte pravděpodobnost $p(n)$, že čísla k a l budou nesoudělná. *(3 body)*

$\star$ b) Nahlédněte, že

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \prod_{p \text{ prvočíslo}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Poznamenejme, že hodnota tohoto součinu vychází překvapivě $\frac{6}{\pi^2}$. *(5 bodů)*

Úloha 6. Porovnejte následující funkce pro hodnoty $x \to \infty$. Tedy rozhodněte, do jakých asymptotických tříd vůči sobě patří ($\mathcal{O}$, Ω, Θ):

$$f_1(x) = \frac{x}{2}, \quad f_2(x) = x^3, \quad f_3(x) = \ln x, \quad f_4(x) = \log_2 x^2, \quad f_5(x) = e^x, \quad f_6(x) = e^{\ln^2 x},$$
$$f_7(x) = e^{3\ln x}, \quad f_8(x) = x\log_3 x, \quad f_9(x) = 5x^3 - 7x^2 + 12x + 5.$$

(2 body)

Úloha 7. Označme r největší přirozené číslo takové, že existuje rovinný graf G na r vrcholech, jehož doplněk je také rovinný. Z přednášky víte, že z asymptotického chování počtu hran rovinného grafu resp. úplného grafu vyplývá, že r je konečné, neboli pro dostatečně velké n doplněk rovinného grafu na n vrcholech nemůže být rovinný. Na cvičení jsme spočítali, že už pro $n \geq 11$ rovinný graf na n vrcholech nemá rovinný doplněk. Tím získáváme horní odhad $r \leq 11$.

a) Ukažte, že $r > 8$. Jinými slovy najděte rovinný graf na 8 vrcholech takový, že i jeho doplněk je rovinný. *(1 bod)*

$\star$ b) Dokažte, že $r \leq 10$. *(3 body)*

$\star$ c) Dokažte, že $r \leq 9$. *(3 body)*