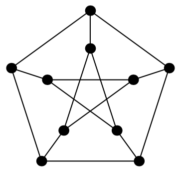
## Kombinatorika a grafy I: série 5 – Latinské čtverce, Hallova věta, souvislost

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

**Úloha 1.** Perfektní párování v grafu $G$ je podgraf $G' \subseteq G$ takový, že všechny vrcholy mají v $G'$ stupeň přesně jedna. Jinými slovy, je to párování takové, že každý vrchol je pokryt (právě jednou) párovací hranou.

a) Najděte 6 různých perfektních párování v Petersenově grafu. *(2 body)*
b) Ukažte, že Petersenův graf má přesně 6 perfektních párování. *(3 body)*

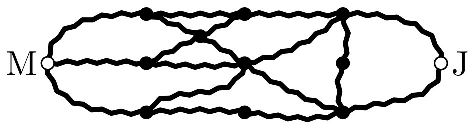


**Úloha 2.** Nezávislá množina $I$ v grafu $G$ je podmnožina vrcholů taková, že žádné dva vrcholy z $I$ nejsou spojené hranou, jinými slovy indukovaný podgraf množinou $I$ je prázdný. Uvažme největší párování v $G$. Dokažte, že vrcholy, do kterých nevede párovací hrana, tvoří nezávislou množinu. *(2 body)*

**Úloha 3.** Dokažte, že hrany každého rovinného grafu bez trojúhelníků lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vedou nejvýše dvě šipky ven. *Hint: Hallova věta* *(4 body)*

**Úloha 4.** Ukažte, že souvislý kubický (tj. 3-regulární) graf je hranově $k$-souvislý právě tehdy, když je vrcholově $k$-souvislý (pro $k \in \{1, 2, 3\}$). *(4 body)*

**Úloha 5.** Na ostrově Papua-Nová Guinea řeší obyvatelé tamní vesnice ležící uprostřed jezera $J$ následující problém: z moře $M$ k nim po místním systému řek (viz obrázek) den co den připlouvají krokodýli a útočí na vesničany. Šaman se proto rozhodl na řece postavit stavidla tak, aby mohli regulovat všechny přítoky do jezera (stavidla lze stavět jen v místech, kde se řeka nevětví). Bohužel si nejsou jisti, zda umí najít optimální řešení, proto se obrací na Vás, jejich zajatce, s nabídkou, že Vás nesní, pokud rozmístění stavidel navrhnete Vy. *($-c^2 + 4c - 3$ bodů; $c$ značí počet použitých stavidel)*




**Úloha 6$\star$.** Definujme osvobozený čtverec řádu $n$ jako tabulku $n \times n$, v jejímž každém políčku je některé z čísel $1, 2, \ldots, n$. Ortogonalitu pro dva osvobozené čtverce definujeme stejně jako pro čtverce latinské, tj. když je "dáme přes sebe", uvidíme každou z $n^2$ možných dvojic čísel právě jednou.

a) Nahlédněte, že existuje-li $t$ navzájem ortogonálních latinských čtverců (NOLČů), pak lze zkonstruovat $t + 2$ navzájem ortogonálních osvobozených čtverců (NOOČů). *(2 body)*
b) Dokažte, že vezmeme-li množinu NOOČů a políčka ve čtvercích libovolně zpermutujeme (ale ve všech čtvercích stejně!), dostaneme opět množinu NOOČů. *(3 body)*
c) Dokažte, že pro množinu alespoň dvou NOOČů platí, že každý čtverec obsahuje každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ právě $n$-krát. *(1 bod)*
d) Pomocí (b) a (c) dokažte, že z $t + 2$ NOOČů lze zkonstruovat $t$ NOLČů. *(3 body)*

**Úloha 7.** Pro graf $G = (V, E)$ označme $\Delta(G)$ maximální stupeň vrcholu. Hranové obarvení grafu $k$ barvami je zobrazení $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že každé dvě sousední hrany mají různou barvu. Nejmenší takové $k$ nazýváme chromatický index grafu a značíme $\chi'(G)$.

a) Dokažte, že $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. *(2 body)*
b) Najděte graf, jehož hrany nelze obarvit pomocí $\Delta(G)$ barev. *(1 bod)*
$\star$ c) Ukažte, že pro každý bipartitní graf $H$ s maximálním stupněm $\Delta$ existuje bipartitní $\Delta$-regulární nadgraf (tj. graf $H'$ takový, že $H$ je podgraf $H'$). *(3 body)*
$\star$ d) Pomocí (c) dokažte, že hrany každého bipartitního grafu lze obarvit pomocí $\Delta(G)$ barev. Spolu s (a) pro bipartitní grafy dostáváme $\chi'(G) = \Delta(G)$. Toto tvrzení se nazývá Königova věta. *(3 body)*
$\star$ e) Dokažte Königovu větu nezávisle na předchozím, např. indukcí podle počtu hran. *(5 bodů)*