Kombinatorika a grafy I: série 6 – Ramseyova věta

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Ramseyovým číslem $R(k,l)$ označme nejmenší přirozené číslo N takové, že libovolný úplný graf na N vrcholech, jehož hrany jsou obarveny dvěma barvami (třeba červenou a zelenou), buď obsahuje úplný podgraf K_k červené barvy, nebo obsahuje K_l zelené barvy. Ramseyova věta říká, že pro libovolné k a l přirozené takové Ramseyovo číslo $R(k,l)$ existuje.

Větu lze zobecnit i na více barev, budeme tedy uvažovat i podobně definovaná Ramseyova čísla $R(k_1, k_2, \ldots, k_l)$.

Úloha 1. Rozhodněte, zda platí následující analogie Ramseyovy věty:

a) Verze pro orientované grafy – tedy obarvíme hrany úplného orientovaného grafu, kde hrany vedou oběma směry. Existuje úplný jednobarevný orientovaný podgraf velikosti k? *(2 body)*

b) Verze pro úplný graf se smyčkami – každý vrchol má navíc kolem sebe smyčku. Existuje úplný jednobarevný podgraf (spolu se smyčkami) velikosti k? *(2 body)*

c) Je pravda, že můžeme při libovolném obarvení dostatečně velkého grafu nalézt pro každé dvě různobarevné hrany jednobarevný trojúhelník, který bude jednu z těchto hran obsahovat? *(2 body)*

d) Platí analogie Ramseyovy věty, kde dostatečně velký úplný graf obarvíme pomocí dvou barev dvakrát a ptáme se, zda existuje úplný podgraf velikosti k, který je v obou barveních obarvený jednobarevně (ne nutně stejnou barvou)? *(2 body)*

Úloha 2. Odhad Ramseyova čísla $R(3,4)$:

a) Dokažte, že $R(3,4) > 8$, tedy nalezněte protipříklad na 8 vrcholech. *(3 body)*

b) Dokažte, že $R(3,4) \le 9$, tedy dokažte, že již devět vrcholů postačuje. *(3 body)*

Úloha 3. Dokažte, že pro libovolné obarvení úplného grafu na n vrcholech pomocí dvou barev existuje jeho jednobarevná kostra. *(2 body)*

Úloha 4. Uvažme Ramseyovo číslo $R(k,l,m)$, jinými slovy barvíme pomocí tří barev.

a) Dokažte, že $R(k,l,2) = R(k,l)$. *(1 bod)*

b) Dokažte, že

$$R(k,l,m) \le \min\Big\{ R\big(k, R(l,m)\big), R\big(l, R(k,m)\big), R\big(m, R(k,l)\big) \Big\},$$

čímž speciálně dvojbarevná verze Ramseyovy věta říká, že číslo $R(k,l,m)$ je také konečné. *(3 body)*

c) Dokažte pro $k,l,m > 2$, že

$$R(k,l,m) < R(k-1,l,m) + R(k,l-1,m) + R(k,l,m-1).$$

(3 body)

d) S využitím c) dokažte indukcí, že

$$R(k,l,m) \le \frac{(k+l+m-3)!}{(k-1)!(l-1)!(m-1)!}.$$

(3 body)

e) S využitím částí a) a c) dokažte, že $R(3,3,3) \le 17$. *(2 body)*

Úloha 5. O čísle řekneme, že má *lichý rozklad*, pokud součet jeho prvočinitelů je lichý. Například 54 má lichý rozklad, protože $54 = 2 \cdot 3^3$ a $2+3+3+3 = 11$ je liché číslo. Dokažte, že pro každé přirozené k existuje N takové, že mezi přirozenými čísly od 1 do N nalezneme k čísel takových, že součet libovolné dvojice z nich má lichý rozklad. *(5 bodů)*

Hint: Obarvěte hrany úplného grafu dvěma barvami podle toho, zda součet daných čísel má lichý rozklad, a použijte Ramseyovu větu. Pokud nalezněte úplný podgraf špatné barvy, modifikujte danou k-tici.

Úloha 6. Nechť G je graf barevnosti $\chi(G) = k$ a H je souvislý graf s nejvýše l vrcholy. Dokažte, že lze obarvit hrany $K_{(k-1)(l-1)}$ dvěma barvami, tak aby neobsahoval červený G, ani zelený H jako podgraf.
Hint: Použijte konstrukci z posledního cvičení. *(3 body)*